Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen
26 Augustus 2004, 14.00–17.00 uur

1. Laat zien dat het volgende Cauchy probleem:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x).$$
de randconditie langs rechten verplaatst, en bepaal deze rechten.

2. Classifiseer de vergelijking
$$(x^2+1)(x^2+4)u_{xx} + (2x^2+5)u_{xy} + u_{yy} = 0,$$
en bepaal, waar mogelijk, de karakteristieken.

3. Reduceer het inhomogene probleem
$$u_t - u_{xx} = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
met de randcondities
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$
tot een homogeen probleem met homogene randvoorwaarden.

4. Beschouw voor (x,y,z) op een begrensd gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de warmtevergelijking
$$u_t = \Delta u + q(x,y,z,t)$$
met de condities
$$u(x,y,z,0) = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \overline{\Omega},$$
en
$$u(x,y,z,t) = g(x,y,z,t), \quad (x,y,z) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0.$$
Laat zien dat er hooguit één oplossing $u(x,y,z,t)$ is.
Aanwijzing: Definieer de functie $E(t) = \int_\Omega w(x,y,z,t)^2 dxdydz$, waarbij w het verschil van twee oplossingen is. Toon aan dat $E(t)$ een niet-toenemende functie is. Gebruik hierbij één van de formules van Green: $\int_\Omega((\nabla w)^2 + w\Delta w)dxdydz = \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial w}{\partial n}dS$.

5. Geef op het vierkant $\Omega = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x,y < \pi\,\}$ een formele oplossing voor het Dirichlet probleem
$$\Delta u = 0,$$
waarbij $u(x,0) = f(x)$, $0 < x < \pi$, en $u(x,y) = 0$ op de andere drie zijden van de rand van Ω.